Institut National Polytechnique

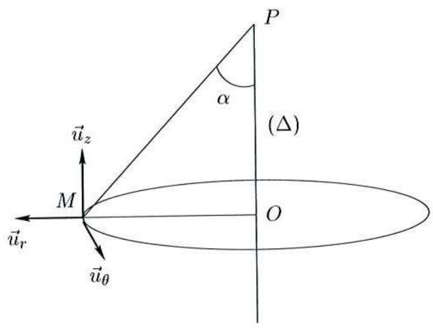
Cycle Préparatoire - 1ère année

Examen de Mécanique 1 du 8 mars 2011, durée : 1 h 30

Aucun document n'est autorisé ; les calculatrices sont interdites.

On rappelle que les correcteurs sont sensibles à la lisibilité des copies, à l'orthographe ainsi qu'au style, lequel -en aucun cas- ne doit être télégraphique. En outre, conformément à l'usage typographique international, les vecteurs sont représentés en gras.

On considère une masse ponctuelle m attachée à l'extrémité M d'une tige articulée *(L)* en un point P d'un axe (Δ)(voir figure). Cette tige a une masse négligeable. Elle a une longueur R et tourne autour de (Δ) avec la vitesse angulaire constante ω. L'angle α entre (Δ) et *(L)* dépend de ω et l'objet de cet exercice est de déterminer la relation liant ces deux grandeurs. Pour cela, on applique la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel galiléen $\mathcal{F}$ puis dans un référentiel mobile $\mathcal{R}$ d'origine O.



1. Relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{F}$

   Le référentiel $\mathcal{F}$ est muni d'un repère cylindrique d'origine O et de vecteurs unitaires $\{\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_z\}$, $\boldsymbol{u}_z$ étant vertical ascendant conformément à la figure.

   (a) Écrire la relation liant ω à la période T de rotation de la masse m et celle liant α, R et le rayon r constant de la trajectoire de M.

   (b) Écrire à l'aide des vecteurs unitaires $\{\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_z\}$ l'expression de $\boldsymbol{OM}$, celle de la vitesse $\boldsymbol{v}(M/\mathcal{F})$ ainsi que celle de l'accélération $\boldsymbol{a}(M/\mathcal{F})$ en fonction de r, ω, $\boldsymbol{u}_r$ et $\boldsymbol{u}_\theta$, puis de R, α, ω, $\boldsymbol{u}_r$ et $\boldsymbol{u}_\theta$.

   (c) Faire le bilan des forces appliquées à M. Exprimer $\boldsymbol{T}$, force appliquée par la tige (L) sur le point M à l'aide de T, module de $\boldsymbol{T}$, de α et des vecteurs unitaires $\boldsymbol{u}_r$ et $\boldsymbol{u}_z$.

   (d) Écrire la relation fondamentale de la dynamique sous la forme d'une équation vectorielle faisant apparaître les vecteurs unitaires $\boldsymbol{u}_r$ et $\boldsymbol{u}_z$.

   (e) En déduire l'équation donnant $\cos\alpha$ en fonction de g, R et ω, où g représente le module de l'accélération de la pesanteur.

   (f) Montrer que l'énergie cinétique de la masse m est de la forme :

   $$\epsilon_k = \epsilon_0[1 - (\frac{g}{R\omega^2})^2].$$

   On explicitera ϵ_0 en fonction de m, R et ω.

(g) Donner l'expression du travail des forces appliquées à la masse m pour que la vitesse angulaire de M passe de ω_1 à ω_2.

2. Relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}$

   Le référentiel $\mathcal{R}$ est muni d'un repère cylindrique de vecteurs unitaires $\{\boldsymbol{u}_r,\ \boldsymbol{u}_\theta,\ \boldsymbol{u}_z\}$ (voir figure).

   (a) Écrire l'expression générale de la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen en faisant apparaître les accélérations $\boldsymbol{a}_r(M/\mathcal{R})$, d'entraînement $\boldsymbol{a}_e(M,\mathcal{R}/\mathcal{F})$ et de Coriolis $\boldsymbol{a}_c(M,\mathcal{R}/\mathcal{F})$.

   (b) Exprimer $\boldsymbol{v}_r(M/\mathcal{R})$, vitesse de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ et $\boldsymbol{a}_r(M/\mathcal{R})$, accélération correspondante.

   (c) En déduire $\boldsymbol{a}_c(M,\mathcal{R}/\mathcal{F})$ et donner l'expression de $\boldsymbol{a}_e(M,\mathcal{R}/\mathcal{F})$ en fonction de ω, r et $\boldsymbol{u}_r$.

   (d) Montrer qu'à l'aide des résultats des questions précédentes, on retrouve la même équation vectorielle qu'à la question 1)d.

3. Mouvement libre de M

   A l'instant $t = t_1$ quand le contact entre la tige et M est rompu, i.e. M est en mouvement libre, les vecteurs de la base $\{\boldsymbol{u}_r,\ \boldsymbol{u}_\theta\}$ coïncident respectivement avec ceux d'une nouvelle base cartésienne $\{\boldsymbol{u}_x,\ \boldsymbol{u}_y\}$ attachée au référentiel $\mathcal{F}$. Les coordonnées du point M sont $(d, 0, 0)$ dans cette dernière base.

   (a) Quelle est la vitesse $\boldsymbol{v}(M/\mathcal{F})$ dans la base cartésienne à $t = t_1$ en fonction de R α et ω ?

   (b) En appliquant de nouveau la relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{F}$, déterminer l'équa-tion cartésienne de la trajectoire de M dans le plan parallèle à (yOz) et situé à la distance d de l'origine. A quel type de trajectoire correspond-t-elle ?

   (c) Quelle est l'asymptote de cette trajectoire quand t tend vers l'infini ?

   (d) Si le point P représenté sur la figure ci-dessus est à une hauteur L du sol, quelle est la distance du point d'impact de M sur le sol par rapport à l'axe (Oz) ?

   (e) Reprendre les trois dernières questions b), c) et d) en considérant une force de frottement $\boldsymbol{F} = -\lambda \boldsymbol{v}(M/\mathcal{F})$ exercée sur M. Quelles conclusions pouvez-vous en tirer ?